RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 15 aprile 1917.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare.* Nota del Corrisp. F. Enriques.

Nell'intorno di un punto singolare $O = (000)$ una curva gobba C si lascia separare in rami rappresentabili mediante serie di potenze, intere e positive, di un parametro t. L'analisi di questi sviluppi ha permesso ad Halphen di risolvere gli elementari problemi numerativi che concernono le singolarità delle curve gobbe, determinando la loro influenza sulla classe ecc. Ma vi è qui un ordine di problemi che non è stato toccato, e che dà origine a qualcosa di nuovo per chi si volga dalla considerazione delle curve piane a quella delle curve gobbe: si tratta di determinare i successivi punti multipli (e semplici) che appartengono ad un ramo di cui è data la rappresentazione parametrica e di esaminare le posizioni notevoli di questi punti, estendendo alle curve gobbe il concetto dei « punti satelliti » che ho recentemente introdotto nella teoria delle singolarità delle curve piane [1].

Quando si tratta di un ramo di curva piana

$$\begin{cases} x = t^{\nu} \\ y = at^{\nu} + bt^{\nu+\nu'} + ct^{\nu+\nu'+\nu''} + \cdots, \end{cases}$$

[1] Cfr. la mia Nota comunicata a codesta Accademia il 7 maggio 1916. Un più ampio sviluppo della teoria delle singolarità delle curve piane e gobbe, basata su tali concetti, si troverà nel secondo volume delle mie *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, redatte colla collaborazione del dott. O. Chisini.

la determinazione dei punti successivi all'origine, colle loro molteplicità, dipende dall'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri $\nu, \nu', \nu'', \ldots$; si procede qui a determinare il massimo comun divisore dei primi due numeri, tenendo conto dei quozienti e dei resti successivi, poi si applica lo stesso procedimento nel confronto del m. c. d. $(\nu\nu')$ e di ν'', e così di seguito: è ovvio che, così facendo, apparisce la particolare importanza di certi (*termini* e) *numeri caratteristici* che non riescono multipli del massimo comun divisore dei numeri precedenti; ai quali (termini e) numeri si riferiscono appunto le teorie di Halphen e di Noether (1).

Ora si consideri un ramo di curva gobba C, nell'intorno dell'origine; sia ν l'ordine del ramo, cioè la molteplicità dell'origine O, e sieno $\nu+\mu$ e $\nu+\mu+\lambda$ le intersezioni del ramo colla tangente e col piano osculatore, sicchè μ e λ designeranno i caratteri cui Halphen ha dato il nome di « rango » e di « classe », la « prima e seconda classe » come anche possono chiamarsi, per non introdur nomi nuovi rispetto alla teoria delle curve piane.

Orientando opportunamente gli assi coordinati, il nostro ramo si potrà rappresentare, nella forma normale di Halphen, scrivendo:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = t^{\nu} \\ y = at^{\nu+\mu} + \cdots \\ z = bt^{\nu+\mu+\lambda} + \cdots \end{cases}$$

i punti (semplici e multipli) del ramo successivi all'origine dipenderanno, in generale, dai termini successivi che compariscono negli sviluppi precedenti; in particolare vi è un gruppo di punti dipendenti dai primi termini degli sviluppi di y e z, e dai numeri ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$; la determinazione di codesti punti e delle loro molteplicità costituisce il passo elementare nel problema che ci occupa, e la soluzione più generale di questo si lascia ricondurre a quel passo.

Orbene, per estendere l'analisi delle singolarità delle curve piane, occorre anzitutto estendere convenientemente la nazione aritmetica dell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore fra due numeri (interi e positivi): qui occorre considerare una terna in luogo di una coppia di numeri, e in questa terna non si deve distingnere alcun ordine dei tre numeri.

La definizione dell'algoritmo più generale che abbiamo in vista viene pôrta senz'altro quando si tenga presente il procedimento euclideo, ove in luogo di divisioni successive si parli di sottrazioni successive: è chiaro che dati tre numeri α, β, γ, si potrà procedere alla ricerca del massimo comun

(1) Cfr. in ispecie la Nota di questi nei Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, T. IX, pag. 89 (1890).

divisore di essi sottraendo il minore dei detti numeri dagli altri due, e così operando di seguito. Il procedimento ha un termine naturale quando si giunge a tre resti uguali, che porgono allora il massimo comun divisore della terna. Ma pei nostri fini occorre arrestarsi innanzi, quando si trovino due resti uguali minori del terzo numero e perciò non possa più proseguirsi l'operazione senza che nasca ambiguità sulla scelta del numero da sottrarre (scelta fra due uguali che è indifferente per la questione aritmetica, ma non per la nostra questione geometrica).

Il procedimento sopra definito, che possiamo denominare *procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*, applicato ai tre numeri ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$, permette di definire un gruppo di punti successivi del ramo, in dipendenza dai primi termini delle serie, ed anche di calcolarne le molteplicità. I punti così definiti appaiono strettamente determinati dall'origine del ramo, O, dalla sua tangente e dal piano osculatore; perciò essi potranno ritenersi come satelliti del primo punto successivo ad O che si trovi su codesto piano, fuori della detta tangente. Nel caso $\mu < \nu$ (che può assumersi come caso elementare tipico) i punti nominati figurano come satelliti del terzo punto O_2 che s'incontra sul nostro ramo.

Ora, dovendo esaminare le circostanze a cui dà luogo l'arresto del nostro procedimento, supporremo — per semplicità di discorso — che manchi la unicità del minimo fra i tre numeri μ, $\nu-\mu$, λ che si ottengono con due sottrazioni successive del minimo a partire dalla terna ν, $\nu+\mu$, $\nu+\mu+\lambda$. Anzitutto se quei tre numeri sono uguali fra loro, si riconosce che il punto O_3 successivo ad O_2 sul nostro ramo (1) riesce un punto libero, dipendente da due parametri: cioè dai coefficienti a e b.

Infatti si eseguiscano sul ramo (1) due trasformazioni quadratiche successive prendendo la prima volta O e la seconda (il trasformato di) O_1 come punti fondamentali isolati; in tal guisa il ramo (1) si trasforma in un altro avente come origine il punto (trasformato di) O_2, e per questo ramo si trova appunto che la tangente nell'origine dipende dai due parametri-coordinate a e b. Per il calcolo effettivo si può servirsi della particolare trasformazione quadratica che consiste nel lasciar fermo x e cambiare y e z in y/x e z/x; si trova come ramo trasformato di (1) di origine O_2:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\, t^{\nu-\mu} + \cdots \\ y = a\, t^{\mu} + \cdots \\ z = \dfrac{b}{a}\, t^{\lambda} + \cdots ; \end{cases}$$

onde, se $\nu-\mu=\mu=\lambda$, la tangente di codesto ramo è la retta

$$a^2 x - y = 0 \quad , \quad bx - z = 0 ,$$

che dipende appunto da entrambi i parametri a e b.

Suppongasi invece che i tre numeri μ, $\nu+\mu$, λ non sieno tutti e tre uguali, ma pur manchi fra loro l'unicità del minimo essendo uguali fra loro, e non al terzo, i più piccoli fra i due numeri. In questo caso la tangente al ramo (3), e quindi il punto O_3, non dipenderà più da due parametri essenzialmente distinti, ma da un solo parametro, oltrechè dalla natura aritmetica dei numeri di cui sopra si discorre. Questo caso non ha riscontro nella teoria delle curve piane: il punto O_3 non può considerarsi qui come un vero punto libero, ma nemmeno come un punto satellite di O_2; piuttosto esso deve ritenersi come semilibero o semisatellite.

L'analisi della relazione di semisatellitismo conduce a distinguere varie specie di punti semisatelliti, dei quali si può dare anche una semplice definizione in rapporto alla trasformazione quadratica. In questa Nota riassuntiva non mi fermerò a spiegare la distinzione accennata; ma voglio avvertire — a scanso di possibili errori in cui potrebbe esser tratto il lettore — che le relazioni di satellitismo e semisatellitismo a cui dànno luogo i punti di una curva gobba non possono dedursi dalle relazioni analoghe cui dan luogo i punti di una proiezione piana generica.

Le cose dette contengono virtualmente l'analisi dei punti successivi appartenenti ad un ramo di curva gobba, imperocchè il procedimento riduttore della trasformazione quadratica permette di estendere ai punti successivi ciò che si è visto per i primi punti.

Così si è tratti a conchiudere: *l'analisi dei punti successivi di un ramo di curva gobba* (1), *e delle loro molteplicità, dipende dal procedimento ternario per la ricerca del massimo comun divisore*; si deve operare su successive terne caratteristiche di numeri, i quali vengono forniti dagli esponenti che figurano nei termini delle serie (1).

In luogo di spiegare partitamente l'applicazione del metodo, terminerò questa Nota con un esempio che — per un lettore esercitato — darà lume su tutto quanto è detto nella presente Nota. Spiegazioni particolareggiate, accessibili a tutti gli studiosi, si troveranno nel volume delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni*, come sopra è annunciato.

L'esempio scelto qui per l'applicazione del nostro procedimento si riferisce al ramo

$$\begin{cases} x = ab\,t^{18} + bt^{21} \\ y = ab\,t^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2\,t^{32} + b^2\,t^{35}; \end{cases}$$

l'analisi della singolarità viene illustrata dal seguente quadro:

$\begin{cases} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = abt^{28} + bt^{31} \\ z = ab^2t^{32} + b^2t^{35} \end{cases}$	prima terna caratteristica	18	28	32	O^{18}
$\begin{cases} x = abt^{18} + bt^{21} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{11} \end{cases}$		18	10	14	O_1^{10}
$\begin{cases} x = abt^{8} + bt^{11} \\ y = t^{10} \\ z = bt^{4} \end{cases}$		8	10	4	O_2^4
$\begin{cases} x = at^4 + t^7 \\ y = \frac{1}{b}\, t^6 \\ z = bt^4 \end{cases}$		4	6	4	
cambiamento d'assi coordinati per ridurre la rappresentazione del ramo a forma normale					O_3^4
$\begin{cases} x = t^7 \\ y = \frac{1}{b}\, t^6 \\ z = bt^4 \end{cases}$	seconda terna caratteristica	7	6	4	
$\begin{cases} x = \frac{1}{b}\, t^3 \\ y = \frac{1}{b^2}\, t^2 \\ z = bt^4 \end{cases}$		3	2	4	O_4^3
$\begin{cases} x = bt \\ y = \frac{1}{b^2}\, t^2 \\ z = b^3\, t^2 \end{cases}$		1	2	2	O_5^1
$\begin{cases} x = bt \\ y = \frac{1}{b^3}\, t \\ z = b^2\, t \end{cases}$		1	1	1	O_6^1

Nella colonna verticale a destra figurano i punti successivi all'origine O coll'indicazione delle rispettive molteplicità, che vengono designate con esponenti. Il gruppo dipendente dalla seconda terna di numeri caratteristici è legato al primo da una relazione di semisatellitismo; in questo gruppo si incontrano anche due punti semplici a cui seguono punti (semplici e) liberi del ramo. Ciò è d'accordo colla circostanza che l'ultimo ramo trasformato è lineare (e precisamente una retta).

Cristallografia. — *Il polimorfismo della dinitrotoluidina* $C_6H_2 . NO_2 . NO_2 . NH_2 . CH_3$ (1) (3) (5) (2). Nota II del Socio E. Artini.

Formazione e condizioni di stabilità delle diverse fasi. Trasformazioni dell'una nell'altra. Fase α. — In testa alla descrizione morfologica delle singole fasi δ, γ, β, ho già dato un cenno affatto sommario e incompleto dei processi di cristallizzazione mediante i quali si possono ottenere. Vediamo ora di precisare, esponendo succintamente i risultati delle numerosissime prove di cristallizzazione che ebbi agio di fare a diverse temperature, dai varî solventi. Premetto, rispetto ai solventi da me usati, che la solubilità della sostanza è minima nel benzolo, piuttosto scarsa nell'etere, alquanto più grande nell'alcool, assai maggiore nell'etere acetico, grandissima in acetone.

La fase δ è metastabile sempre, certo almeno fino a temperature di qualche grado inferiori a 0°. Essa però si forma con tutta facilità da soluzioni in benzolo o in etere, oppure in miscela di etere ed alcool, a temperature non superiori a 20°; in queste condizioni è anzi la fase che si forma esclusivamente, o almeno in grandissima prevalenza, insieme a minime quantità di γ, più raramente di β, fino a che il recipiente di cristallizzazione resti aperto e l'evaporazione non sia ostacolata. Se però, invece che in un bicchiere aperto, si opera in una bevuta, per esempio con soluzioni in miscela di etere e alcool, e, quando la cristallizzazione è proceduta abbastanza, la bevuta si tappa, conservandola alla temperatura ordinaria, cioè tra 10° e 20°, si vedono gli aghi gialli della δ lentamente corrodersi, disciogliendosi, e al loro posto formarsi, crescendo gradatamente, individui triclini della γ, fino a che la trasformazione è completa. Il processo può durare varî giorni nella miscela di alcool ed etere, e più è lento quanto più è bassa la temperatura; in tale miscela anzi, a 0°, la velocità di trasformazione, dipendente dalla diversità di solubilità delle due fasi, è già praticamente nulla. Viceversa, a 35°, in alcool, o, meglio, in etere acetico, la trasformazione totale, in vaso chiuso, è questione di pochi minuti.

Usando il benzolo, nel quale, come già accennammo, minima è la solubilità della sostanza, la apparente stabilità della δ alla temperatura ordinaria aumenta singolarmente. Ho tenuto per qualche mese una provetta ben tappata, nella quale aghi gialli δ e cristallini γ aranciati erano conservati insieme, in soluzione benzolica satura: dopo tanto tempo, solo affatto incipiente si poteva dire la trasformazione della fase δ in γ.

Viceversa, anche a bassa temperatura, non sono mai riuscito ad ottenere spontaneamente la δ da soluzioni in acetone; anzi, seminando la δ in soluzione acetonica satura, con grande rapidità se ne osserva la scomparsa, con formazione di γ. Solo a temperature vicine a $-10°$ son riuscito a conservare per qualche tempo una accanto all'altra le due fasi in soluzione acetonica. Credo però che questo, anzi che dal fatto di aver raggiunto un punto di trasformazione $\gamma \overset{-10°}{\rightleftarrows} \delta$, derivi piuttosto dalla grande diminuzione di solubilità, e conseguente rallentamento della trasformazione; nè in acetone nè in altro solvente, nemmeno a $-12°$, sono riuscito mai a constatare che avvenga, almeno con velocità apprezzabile, la trasformazione di γ in δ.

La stessa fase δ si ottiene anche spesso, come formazione metastabile accidentale, da soluzioni alcooliche calde, bruscamente raffreddate, specialmente ricorrendo a semina. Si sottintende che, lasciando i cristalli immersi nel liquido, avviene poi la trasformazione in γ, secondo quanto dissi più sopra; il fenomeno procede assai più rapido se si impedisce l'evaporazione del solvente: altrimenti può accadere, come nelle cristallizzazioni da etere, che la velocità di accrescimento essendo superiore alla velocità di trasformazione, lo stato di falso equilibrio duri a lungo, con formazione contemporanea di δ e di γ, talvolta anche di β.

Anche a secco la fase δ si dimostra metastabile, e i suoi prismetti giallo-citrini, anche chiusi in un tubo, specialmente se esposti alla luce, alla temperatura ordinaria, lentamente finiscono per diventare opachi e aranciati, per paramorfosi di γ su δ. La velocità di trasformazione, al solito, aumenta molto con la temperatura; quasi nulla tra 0° e $+15°$, essa incomincia a diventare sollecita fra 35° e 40°, e se si scalda rapidamente, verso 50° la trasformazione stessa avviene tutta d'un tratto, con brusco mutamento di colore.

La fase γ è indubbiamente la più stabile alla temperatura ordinaria, o a temperatura più bassa; essa è quella che si forma normalmente, almeno in gran prevalenza, da soluzioni in etere acetico e in acetone, puri o mescolati con alcool.

Riscaldando lentamente in apposita stufetta, sotto al microscopio, lamine di sfaldatura basale di questa modificazione triclina, si assiste alla sua trasformazione enantiotropa in una fase rombica, che io ritengo identica alla β quale si ottiene per diretta cristallizzazione. Verso 60° C. si nota chiaramente

(l'osservazione riesce particolarmente istruttiva tra nicols incrociati sulle lamine geminate) una diminuzione della dispersione dei piani degli assi ottici, diminuzione che rapidamente si accentua con l'aumento della temperatura, fin che a 63° la sostanza è perfettamente rombica, otticamente identica alla β, con totale scomparsa di ogni traccia di geminazione. Col raffreddamento, avviene con perfetta enantiotropia la trasformazione inversa: lamine nuove di geminazione $\{010\}$ si formano ordinariamente, in posizione diversa e per lo più in numero minore di quello che si osservava originariamente. Di pari passo con la trasformazione ottica procede quella morfologica: a 63° le basi dei due individui triclini geminati si riuniscono in un unico piano; col raffreddamento si riforma tra di esse il caratteristico angolo di circa 7°.

Quanto alla fase β, essa non si ottiene dai solventi sopra citati con tanta facilità e regolarità quanto la precedente, rispetto alla quale è indubbiamente metastabile, alla temperatura ordinaria. Di solito, i suoi cristalli compajono per i primi, specie dalle soluzioni in etere acetico o in acetone; ma in un secondo tempo essi copronsi di individui triclini in concrescimento regolare; poi lentamente cedono del tutto il campo alla fase triclina. Per raffreddamento lentissimo di soluzioni in alcool bollente, o per evaporazione di soluzioni alcooliche in stufa, a temperature vicine a + 65°, si può talora averla pura; ma anche in questi casi, abbandonando i cristalli nel liquido, col progressivo raffreddamento comincia a formarsi la γ, che finisce poi per prevalere.

Riscaldando, a secco, nella sopra ricordata stufetta, lamine di sfaldatura basale della fase γ, nella maggior parte dei casi non si nota alcun cambiamento, fino che si arrivi a 148°. Talvolta però, fra 35 e 45° si osserva una brusca trasformazione in γ, con divisione delle lamine in quattro settori, limitati dalle diagonali, con le basi non più contenute in un unico piano, ma formanti tra loro angoli molto sentiti, così da costituire una specie di piramide romba ottusa da una parte, e una corrispondente incavatura dall'altra. Che si tratti di individui della fase γ è provato dalle proprietà ottiche: l'estinzione non è più contemporanea per tutti i colori, e i piani degli assi ottici sono dispersi come già si descrisse per la fase triclina; tra due settori adiacenti per la diagonale corta l'angolo d'estinzione a luce gialla è di circa 20° - 22°. A + 63° C. la distinzione ottica scompare, e l'estinzione torna contemporanea per tutti i colori secondo le diagonali.

Anche le lamine della β che a 40° non subirono alcuna alterazione (e sono le più numerose, come accennai già) quando la temperatura, dopo aver raggiunto 70° - 80° C., si abbassi lentamente, presentano verso 60° (talora con qualche ritardo, dovuto a surfusione cristallina) la trasformazione enantiotropa nella fase γ, che è veramente la stabile tra 0° e + 63°. Solamente, invece della geminazione $\{010\}$, con tracce parallele alla diagonale

corta, o accanto a questa, tali lamine sottoposte prima a riscaldamento e poi a raffreddamento, presentano di solito numerose e sottili lamelle secondo l'altra legge, meno precisamente definita, che io ritengo simile a quella del periclino nei plagioclasî, così da lasciar riconoscere, a nicols incrociati, una caratteristica rigatura parallela alla diagonale lunga. Non occorre dire che, riscaldando nuovamente, a 63° scompare ogni traccia di geminazione, e la lamina torna rombica (β), per ridiventar nuovamente triclina (γ) ad un ulteriore raffreddamento, con perfetta reversibilità.

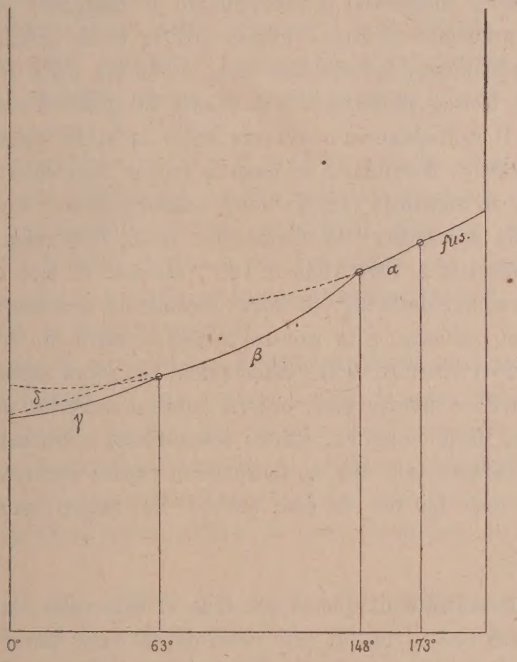


Fig. 6.

Quando poi, riscaldando la sostanza nella stufetta, qualunque sia la modificazione dalla quale si è partiti in origine, si raggiunga la temperatura di 148° C., si assiste ad una nuova trasformazione enantiotropa, con produzione di una quarta fase (α), ben distinta da γ e da β per il colore, che è un giallo d'orpimento chiaro. La trasformazione, se l'innalzamento della temperatura è lento, avviene gradatamente : si forma in un punto della lamina aranciata trasparente una macchia torbida giallo-chiara, formata da un aggregato cristallino di α; la macchia s'allarga poi gradatamente, fino ad occupare tutta la lamina. Se si interrompe il riscaldamento prima che la trasformazione sia completa, appena la temperatura scenda sotto 148°

avviene la trasformazione inversa; le apparenze del fenomeno sono le stesse, notissime, della trasformazione enantiotropa α-solfo $\rightleftarrows$ β-solfo.

A 173° la sostanza fonde in un liquido limpido, di color giallo chiaro; per raffreddamento, da questo si segregano individui cristallini scheletriformi della stessa fase α, i quali presto si riuniscono a formare un fitto aggregato. Poco posso dire sulle proprietà di questa modificazione, perchè essa è stabile solo ad alta temperatura, e le osservazioni sono assai malagevoli in tali condizioni. I cristalli si presentano in forma tabulare romba, con angolo che non mi pare molto diverso da quelli delle sezioni basali delle fasi γ e β; le estinzioni sono diagonali; l'assorbimento è maggiore per la diagonale lunga (giallo aranciato chiaro) e minore per la corta (giallo citrino).

Col raffreddamento, questa fase α si trasforma nella β, come si rileva facilmente dal brusco cambiamento di colore, dal giallo d'orpimento all'arancione; ma se il raffreddamento avviene entro la stufa, senza la presenza di germi di β e di γ, d'ordinario si osserva (come frequentemente accade in casi analoghi) un sensibile ritardo nella trasformazione, dovuto al fenomeno detto surfusione cristallina; la formazione della fase rossa avviene cioè a temperature inferiori a 148° (fino a 120°, secondo le mie osservazioni).

Nel diagramma della fig. 6, dove, secondo la consuetudine, le pressioni sono portate in ordinate, e in ascisse le temperature, ho tentato di rappresentare, secondo i risultati delle osservazioni qui sopra esposte, le condizioni di equilibrio tra le diverse fasi; occorre appena avvertire che il diagramma è, per la parte delle pressioni, affatto schematico, e tracciato solo in base al principio fondamentale che la tensione di vapore aumenta con la temperatura, e che essa ha per la fase stabile un valore minore che per la labile.

Nel comportamento di questa sostanza si osservano varî fenomeni interessanti; ma ciò che vi ha di più notevole, a parer mio, non è tanto il numero relativamente grande delle fasi, e la facilità con cui due di esse si formano insieme, una accanto all'altra, o anche in concrescimento regolare, perchè di questi falsi equilibrî, dovuti a scarsa velocità di trasformazione, sono ormai abbastanza numerosi gli esempî; ma piuttosto la evidente influenza della natura del solvente sulla formazione dell'una piuttosto che dell'altra modificazione. Così, da etere si ottiene normalmente, per lenta evaporazione, la δ, mentre questa in identiche condizioni non si ha mai da acetone, dove si forma invece ordinariamente solo la γ, accidentalmente talora anche la β.

Sulla natura di questa influenza nulla ancora oserei affermare; ma essa è innegabile, e io credo che non sarebbe inutile se esperienze di questo genere venissero ripetute sopra altre sostanze artificiali, poi che in queste il polimorfismo si può studiare con ben maggiore comodità che non sulla maggior parte dei minerali in natura.

Fisica terrestre. — *Onde interne nell' Adriatico.* Risposta al prof. E. Oddone (1). Nota del Corrisp. Luigi De Marchi.

Rispondo al prof. Oddone, perchè la Memoria ch'egli sottopone a critica, e della quale nega i risultati, può essere sconosciuta ai lettori di questi Rendiconti, essendo pubblicata altrove (2). Mi limito a pochi appunti:

1°. L'illazione che le onde sommerse da me segnalate siano onde di marea non è fondata soltanto sul valore del periodo medio da me dedotto *in prima approssimazione*, come afferma il prof. Oddone, ma sui singoli periodi delle tre onde successive riscontrate, e sul calcolo dell'epoca del loro arrivo alla spiaggia, *messa in rapporto coi dati di marea di quel giorno e del successivo a Venezia.*

2°. La spiegazione, che il prof. Oddone crede di poter sostituire, è basata, per sua stessa confessione, su una semplice *analogia* col fenomeno di oscillazione di due pendoli verticali sovrapposti, cioè con un movimento a due soli gradi di libertà. Spetta a lui dimostrare che il problema si può ragionevolmente ridurre a quello schema semplicista, tanto da poter senz'altro applicare ad esso le formole relative.

3°. Secondo il prof. Oddone le onde sommerse sarebbero la risultante, per somma e differenza, di due sistemi d'onda di sessa, del periodo di circa mezz'ora, molto veloci, propagantisi nei due strati superiore e inferiore; ma di queste onde bisognerebbe dimostrare l'esistenza, trattandosi di onde *di parecchi metri d'altezza*, poichè l'ampiezza dell'onda interna è di circa 8 m. La curva mareografica, regolarissima, di quei giorni non ne ha dato il più piccolo indizio.

4°. Che il prof. Oddone non creda a tale ampiezza è curioso, perchè i dati di salsedine e di temperatura furono raccolti coi metodi rigorosissimi del Comitato internazionale oceanografico. Ch'egli poi la spieghi *in parte* come effetto della convettività, in una condizione così spiccata di equilibrio stabile, e confronti l'effetto di una oscillazione del periodo di 12 ore sull'acqua sovrastante con quello della vibrazione di una corda elastica sulla polvere che la riveste, è almeno strano. Il fatto è che questa ampiezza disturba la sua ipotesi, mentre risponde così bene alla teoria delle onde interne di Stokes.

5°. Dato il salto di densità, onde interne *dovevano* formarsi, e formata è la loro teoria: non vedo quindi l'opportunità di ricorrere a semplici analogie con altri fenomeni. Potrà darsi che dell'origine di quelle onde si possa dare una spiegazione diversa dalla mia, ma finora credo che i fatti mi diano ragione.

(1) Questi Rendiconti, vol. XXVI, fasc. 4°, seduta del 18 febbraio 1917.

(2) Atti del R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti, vol. LXXV, parte 2ª (1915-16).

Matematica. — *Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Le formole risolutive dell'equazione integrale di seconda specie

$$[1] \qquad u(s) = h(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, h(t)\, dt\,,$$

date dal Fredholm (1), dallo Schmidt (2), come pure quelle date da me in una recente Memoria (3) presentano, nella loro applicazione, delle difficoltà spesso non lievi, derivanti dalla determinazione delle funzioni e delle costanti che in esse figurano (4).

Difficoltà analoghe, se non anche maggiori, s'incontrano nella risoluzione dell'equazione integrale di prima specie

$$[2] \qquad g(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s,t)\, h(t)\, dt\,,$$

per la quale poi, a differenza di quella di seconda, non si conosce alcuna formula risolutiva, che rappresenti incondizionatamente una soluzione della [2], nei casi in cui questa ne ammetta.

Però tanto l'equazione [1] quanto la [2] ammettono una soluzione *formale* molto semplice, che per la [1] è data da

$$[3] \qquad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n(t)\,,$$

(1) *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Math., t. XXVII, 1903.

(2) *Entwicklung willkürlicher Funktionen* etc. Inaugural-Dissert., Gottingen, 1905.

(3) *Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm.* Rend. Circolo Matem. Palermo, XLI, 1916.

(4) Invero la formola del Fredholm è di laboriosissima applicazione; quella dello Schmidt esige la conoscenza degli autovalori e delle autofunzioni del nucleo simmetrico; infine quella data da me, nella citata Memoria, richiede la conoscenza delle funzioni caratteristiche, la cui determinazione è tutt'altro che facile, anche nei casi in cui il nucleo abbia forma semplicissima, come la seguente: $\mathrm{K}(s,t) = s + t$.

dove

$$u_n(t) = \int_a^b K_n(t, r)\, u(r)\, dr \quad ; \quad u_0(t) = u(t) :$$

e per la [2], nel caso che il nucleo sia simmetrico, da (1)

$$[4] \qquad h(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_1^{(\nu)}(t)}{\Gamma_\nu} .$$

Disgraziatamente però, tanto per la [3] che per la [4], ben di rado sono soddisfatte le condizioni di convergenza e di integrabilità, termine a termine, senza le quali le suddette espressioni non possono rappresentare una soluzione *effettiva*; si è così quasi sempre costretti a rinunciare ai vantaggi derivanti dalla loro semplicità.

Mi sono perciò proposto di vedere se sia possibile di utilizzare le [3] e [4] per la risoluzione delle [1] e [2] rispettivamente, nel caso in cui esse non siano convergenti; ed ho trovato che, se esse sono *sommabili*, nel senso dato a tale vocabolo dal Borel (2), esse rappresentano una soluzione dell'equazione proposta. Oggetto della presente Nota è appunto quello di esporre questo risultato, il quale parmi presentare qualche interesse.

2. Diremo che una serie di funzioni $v_n(s)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, continue in un intervallo finito $(a\,b)$, è *sommabile* in esso se

1°) la serie

$$S(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(s) \frac{x^n}{n!} \qquad \left(\sigma_n(s) = v_0(s) + v_1(s) + \cdots + v_n(s)\right)$$

è convergente per ogni $x \geq 0$ finito e per ogni valore di s in $(a\,b)$;

2°) l'espressione $e^{-x} S(s, x)$ tende, per $x \longrightarrow \infty$, ad un limite $S(s)$, determinato e finito.

Il limite $S(s)$, quando esiste, sarà la *somma* della serie data $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(s)$.

Ricorderemo il seguente teorema di Hardy (3) di cui faremo uso:

Se $f(x)$ è una funzione continua assieme alla sua derivata prima $f'(x)$ per $x \geq 0$, e se l'integrale improprio

$$[\alpha] \qquad \int_0^{\infty} e^{-x} f'(x)\, dx$$

(1) Vergerio, loc. cit., cap. III, § 1, pag. 22.

(2) *Leçons sur les séries divergentes*, cap. III. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

(3) Quaterly Journal of Mathematics, vol. 35, 1903.

è convergente, è pure convergente l'integrale

$$(\beta) \qquad \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx\,;$$

si ha inoltre

$$(\gamma) \qquad \lim_{x=\infty} e^{-x} f(x) = 0\,.$$

Il teorema è evidentemente valido anche nel caso in cui la $f(x)$ sia funzione, oltre che di x, anche di un parametro s variabile in un intervallo finito $(a\,b)$; potremo perciò dire che, se, per ogni valore di s in $(a\,b)$, l'integrale $[\alpha]$ converge, convergerà del pari l'integrale $[\beta]$ e sarà inoltre valida la $[\gamma]$.

3. Supposto che le funzioni $K(st)$ ed $u(s)$ siano entrambe limitate e continue, la prima entro il campo $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ e la seconda entro l'intervallo finito $(a\,b)$, si dimostra con facilità che la serie $S(s\,.\,x)$ del numero precedente, relativa alla serie $[3]$, è sempre convergente, per ogni $x \geqq 0$ finito, in modo assoluto ed indipendentemente da s. Si ha invero, se $\mathbf{M}$ è un numero finito e positivo,

$$|K\,(s\,,\,t)| < \mathbf{M}\,,$$

$$|K_2(s.t)| \leqq \int_a^b |K(s,r)|\,|K\,(r,t)|\,dr < \mathbf{M}^2\,(b-a)\,.$$

$$|K_3(s\,t)| \leqq \int_a^b |K(s,r)|\,|K_2(r\,t)|\,dr < \mathbf{M}^3\,(b-a)^2\,,$$

ed, in generale,

$$|K_n(s,t)| < \mathbf{M}^n (b-a)^{n-1}\,.$$

Se quindi è $|u(s)| < m$, avremo

$$|u_n(s)| \leqq \int_a^b |K_n(st)|\,|u(t)\,dt < \mathbf{M}^n\,(b-a)^n\,m\,;$$

ed anche posto $|\lambda|\,\mathbf{M}\,(b-a) = \varrho$,

$$|\sigma_n(s)| \leqq \sum_{r=0}^{n} |\lambda|^r\,|u_r(s)| < m \sum_{r=0}^{n} \varrho^r = m\,\frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho}\,;$$

ed ancora, se p è un numero intero e positivo qualunque,

$$\left|\sum_{r=n}^{n+p} \sigma_r(s)\,\frac{x^r}{r!}\right| \leqq \sum_{r=n}^{n+p} \left|\sigma_r(s)\right| \frac{x^r}{r!} < \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} (1-\varrho^{r+1})\,\frac{x^r}{r!} =$$

$$= \frac{m}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{x^r}{r!} - \frac{m\varrho}{1-\varrho} \sum_{r=n}^{n+p} \frac{(\varrho x)^r}{r!}\,;$$

da cui risulta che per la serie [3] è sempre soddisfatta la prima delle due condizioni poste per la sua sommabilità in $(a\,b)$, ed inoltre che la serie $S(s,x)$ è convergente uniformemente rispetto ad s, per ogni $x \geq 0$ finito, e perciò integrabile termine a termine, rispetto a questa variabile, nell'intervallo $(a\,b)$.

Gioverà poi qui notare che la serie

$$v(sx) = u_0(s) - \lambda u_1(s)\,x + \lambda^2 u_2(s)\frac{x^2}{2!} - \lambda^3 u_3(s)\frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

che il Borel chiamò *associata*, converge anch'essa in modo assoluto ed uniforme rispetto ad s, per ogni valore finito di $x \geq 0$, come si vede subito dalla relazione

$$|v(s,x)| \leq \sum_{r=0}^{\infty} |\lambda|^r |u_r(s)| \frac{x^r}{r!} < m \sum_{r=6}^{\infty} \frac{(\varrho x)^r}{r!} = m e^{\varrho x}.$$

È poi evidente che si potrà applicare ad essa la derivazione termine a termine rispetto ad x: sarà cioè

$$[5] \qquad v'(s,x) = -\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s)\,x - \lambda^3 u_3(s)\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

4. Supposto che la funzione $e^{-x}S(s,x)$ convenga al suo limite $S(s)$ *indipendentemente da* s, sostituiamo nel secondo membro della [1] l'espressione $e^{-x}S(s,x)$ alla funzione incognita $h(s)$; osservando che

$$\lambda \int_a^b K(s,t)\,\sigma_n(t)\,dt = -\sigma_{n+1}(s) + \sigma_0(s),$$

avremo:

$$e^{-x}S(s,x) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,e^{-x}S(t,x)\,dt =$$

$$= e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r(s)\frac{x^r}{r!} - e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}(\sigma_{r+1}(s) - \sigma_0(s))\frac{x^r}{r!} =$$

$$= \sigma_0(s) - e^{-x}\sum_{r=0}^{\infty}[\sigma_{r+1}(s) - \sigma_r(s)]\frac{x^r}{r!} =$$

$$= u_0(s) - e^{-x}\left[-\lambda u_1(s) + \lambda^2 u_2(s)\,x - \lambda^3 u_3(s)\frac{x^2}{2!} + \cdots\right];$$

e quindi, per la [5],

$$[6] \qquad e^{-x}S(s,x) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,e^{-x}S(t,x)\,dt = u_0(s) - e^{-x}v'(s,x).$$

Poichè la [3], per le ipotesi fatte, è sommabile in $(a\,b)$, esisterà finito e determinato il limite per $x \longrightarrow \infty$ del primo membro, potendosi inver-

tire i segni di limite e di integrale, in grazia della supposta convergenza uniforme della funzione $e^{-x}S(s,x)$ verso il suo limite; esisterà quindi, pure determinato e finito, il $\lim_{x\to\infty} e^{-x}v'(s,x)$.

5. Indicando ora con $S'(s,x)$ la derivata della funzione $S(s,x)$ rispetto ad x, si può scrivere

$$e^{-x}[S'(s,x) - S(s,x)] = e^{-x}v'(s,),$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{-x}S(s,x) = e^{-x}v'(s,x);$$

ed essendo

$$[e^{-x}S(s,x)]_{x=0}^{\infty} = S(s) = u_0(s),$$

avremo anche

[7] $$S(s) - u_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}v'(s,x)\,dx;$$

da cui integrando per parti

$$S(s) - u_0(s) = -[e^{-x}v'(s,x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}v''(s,x)\,dx,$$

dove $v''(s,x)$ indica la derivata della $v'(s,x)$ rispetto ad x.

Esistendo, per quanto osservammo più sopra, finito e determinato il $\lim_{x=\infty}[e^{-x}v'(s,x)]$, l'integrale improprio del secondo membro sarà convergente; pel citato teorema di Hardy sarà allora

$$\lim_{x=\infty}[e^{-x}v'(s,x)] = 0;$$

e la funzione $\lim_{x=\infty} e^{-x}S(s,x)$ sarà per la [6] una soluzione della [1].

6. Integrando per parti l'integrale del secondo membro della [7], si ottiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}v'(s,x)\,dx = [e^{-x}v(s,x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x}v(s,x)\,dx;$$

e poichè l'integrale del primo membro è finito, convergerà, pel teorema di Hardy, anche quello del secondo; sarà inoltre

$$\lim_{x=\infty} e^{-x}v(s,x) = 0.$$

Si ha così dalla [7]:

[8] $$S(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}v(s,x)\,dx.$$

Possiamo quindi affermare che *se la funzione* $e^{-x}S(s.x)$, *relativa alla serie* [3], *tende per* $x \longrightarrow \infty$ *ad un limite determinato e finito indipendentemente da* s, *questo limite sarà una soluzione dell'equazione* [1].

7. Come esempio, consideriamo l'equazione

$$\cos s = h(s) + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} (s + \cos t)\, h(t)\, dt\,.$$

Essendo

$$u_0(s) = \cos s \;;\; u_1(s) = \pi \;;\; u_n(s) = (2\pi^2)^{n-1}\, s \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n u_n(s) = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \frac{s}{2\pi^2} - \frac{s}{2\pi^2} + \cdots$$

è indeterminata. Essa però soddisfa alla condizione enunciata al numero precedente; e poichè si ha

$$v(s,x) = \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) =$$

$$= \cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}\,(e^{-x} + x - 1)\,,$$

la [8] ci darà la soluzione

$$h(s) = S(s) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}\left[\cos s - \frac{x}{2\pi} + \frac{s}{2\pi^2}\,(e^{-x} + x - 1)\right] dx = \cos s - \frac{1}{2\pi} + \frac{s}{4\pi^2}\,,$$

la quale, come facilmente si verifica, soddisfa la [1].

8. Per dimostrare che la sommabilità della serie [4] è condizione sufficiente affinchè questa possa rappresentare una soluzione della [2], basterà provare che *ogni serie di funzioni convergente in modo assoluto ed uniforme in un intervallo finito* $(a\,b)$ *è sempre sommabile in esso; e la sua nuova somma coincide con l'antica.*

Abbiasi infatti la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(s)$ di funzioni definite in $(a\,b)$ convergente in modo assoluto ed uniforme; e sia $V(s)$ la sua somma secondo l'antica definizione.

Consideriamo la funzione corrispondente $S(s,x)$:

$$S(s.x) = \alpha_0(s) + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s)]\,x + [\alpha_0(s) + \alpha_1(s) + \alpha_2(s)]\frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots =$$

$$= \alpha_0(s)\, e^x + \alpha_1(s)\left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right] +$$

$$+ \alpha_2(s)\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right] + \cdots\cdots =$$

$$= \alpha_0(s)\, e^x + \alpha_1(s)\,(e^x - 1) + \alpha_2(s)\,(e^x - 1 - x) +$$

$$+ \alpha_3(s)\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}\right) + \cdots\cdots$$

Essendo, per $x \geqq 0$, i coefficienti delle $\alpha_n(s)$ tutti positivi e minori di e^x, avremo

$$|S(s,x)| < e^x \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la funzione $S(s,x)$ sarà quindi convergente per ogni $x \geqq 0$ e finito; e poichè

$$\lim_{x=\infty} |e^{-x} S(s,x)| < \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n(s)|,$$

la serie data è sommabile (n $(a\,b)$.

Ora essendo

$$V(s) - e^{-x} S(s,x) = e^{-x}\Big[\alpha_1(s) + \alpha_2(s)(1+x) + \\ + \alpha_3(s)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) + \alpha_4(s)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \cdots\Big] = \\ = e^{-x}\Big[\Big\{V(s) - \alpha_0(s)\Big\} + \Big\{V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s)\Big\} x + \\ + \Big\{V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \alpha_2(s)\Big\}\frac{x^2}{2!} + \cdots\Big],$$

posto

$$V(s) - \alpha_0(s) - \alpha_1(s) - \cdots - \alpha_n(s) = R_n(s),$$

sarà anche

$$V(s) - e^{-x} S(s,x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!};$$

la quale può anche scriversi, se m è un numero finito qualunque,

$$V(s) - e^{-x} S(s,x) = e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r!} + e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!}.$$

Per la convergenza uniforme della serie data, potrà determinarsi un numero m positivo e finito tale che, per ogni $r \geqq m$, sia $|R_r(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$; essendo $\frac{\varepsilon}{2}$ una quantità positiva arbitrariamente piccola; sarà, con ciò, per ogni $x \geqq 0$ e finito.

$$\left| e^{-x} \sum_{r=m+1}^{\infty} R_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| < e^{-x} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, essendo, per ogni r finito, $\lim_{x=\infty} e^{-x} x^r = 0$, si potrà trovare un valore finito x_1 di x tale che per $x > x_1$, si abbia, qualunque sia s,

$$\left| e^{-x} \sum_{r=0}^{r=m} R_r(s) \frac{x^r}{r!} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà quindi per $x > x_1$:

$$|V(s) - e^{-x} S(s,x)| < \varepsilon;$$

cioè la nuova somma coincide coll'antica.

9. Ritornando alla questione propostaci, supposto che [4] sia sommabile in $(a\,b)$, che la [2] ammetta soluzione e che esista un numero finito e positivo ϱ tale da aversi, per ogni valore di ν,

$$\left| \frac{G_1^{(\nu)}(s)}{\Gamma_\nu} \right| < \varrho^\nu$$

la serie $S(s,x)$, relativa alla [4] sarà, per quanto vedemmo al n. 3, uniformemente convergente rispetto ad s; sarà inoltre

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} S(s,x) = S(s).$$

Supposto ancora che la convergenza al limite per $x = \infty$ sia uniforme, avremo:

$$\int_a^b K(s,t) \left\{ \lim_{x=\infty} e^{-x} S(t,x) \right\} dt = \lim_{x=\infty} \int_a^b K(s,t)\, e^{-x} S(t,x)\, dx =$$

$$= \lim_{x=\infty} \left[G^{(1)}(s) + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) \} x + \right.$$

$$\left. + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) + G^{(3)}(s) \} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right] e^{-x}.$$

Ma ammettendo la [2] soluzione, dev'essere [1]

$$g(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}(s),$$

dove la serie del secondo membro è sommabile in $(a\,b)$, in grazia della sua convergenza assoluta ed uniforme; dovrà perciò aversi:

$$g(s) = \lim_{x=\infty} e^{-x} \left[G^{(1)}(s) + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) \} x + \right.$$

$$\left. + \{ G^{(1)}(s) + G^{(2)}(s) + G^{(3)}(s) \} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right];$$

il che prova che la [4] è una soluzione della [2].

[1] Vergerio, loc. cit., pag. 19.

Fisica-chimica. — *Sul potere rotatorio dei tartrati di amine sostituite* [1]. Nota di Luigi Casale, presentata dal Corrisp. Arnaldo Piutti.

A. Kannonikow [2] in uno studio sul potere rotatorio specifico dell'acido tartarico e dei suoi sali trovò che i tartrati di basi organiche deboli, come l'anilina, l'*o*- e *p*- toluidina, la chinolina, ecc., hanno in soluzione acquosa lo stesso potere rotatorio specifico dell'acido tartarico libero e concluse che questi sali in soluzione acquosa sono completamente idrolizzati.

Più recentemente J. Minguin e H. Wohlgemuth [3] studiarono i tartrati di amine grasse ed aromatiche in soluzione per mezzo del potere rotatorio. Essi, per vedere se i tartrati di queste basi sono dissociati, esaminavano soluzioni acquoso-alcooliche equimolecolari di acido tartarico in presenza di quantità crescenti di amine. Per le basi alifatiche il potere rotatorio raggiungeva un massimo quando in presenza di una molecola di acido si trovavano due molecole di amina, nè più aumentava per ulteriore aggiunta di questa. Ciò avrebbe provato che i tartrati neutri di queste basi non sono idrolizzati. Per le amine aromatiche il potere rotatorio cresceva gradualmente a partire dal sale acido col crescere della base fino ad otto e più molecole di questa per una di acido. E, poichè agli autori non riuscì di preparare tartrati neutri di queste amine, essi conclusero che il sale acido formantesi per la unione di una molecola di acido tartarico con una molecola di amina aromatica è notevolmente idrolizzato e che l'aggiunta di ulteriori quantità di base rende sempre minore la dissociazione idrolitica fino ad annullarsi.

Le affermazioni di Kannonikow e quelle di Minguin e Wohlgemuth relative alla idrolisi dei tartrati non sono in accordo coi risultati da me ottenuti nello studio di questi sali.

I lavori di Landolt [4] e di Oudeman [5] hanno stabilito che per i sali in soluzione diluita anche il potere rotatorio è una proprietà addittiva, e la legge si può esprimere nella seguente forma: *sali contenenti lo stesso ione*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Napoli.

(2) J. russ.-chem. Gesellsch., 1890 [1], 369.

(3) C. r. 147, 998.

(4) B. VI. 1073.

(5) Beibl. IX. 635.

otticamente attivo devono, allo stato di completa dissociazione in soluzioni equivalenti, avere lo stesso potere rotatorio. È naturale che non seguiranno questa legge quei sali i quali in soluzione diluita si dissociano idroliticamente. In tal caso la diminuzione del numero degli ioni otticamente attivi per formare altrettante molecole attive indissociate provocherà una variazione nel potere rotatorio molecolare del composto in soluzione proporzionale alla differenza fra i poteri rotatorî delle due specie molecolari attive ed alla quantità di sale idrolizzato. Nel caso dell'acido tartarico e dei tartrati questa differenza è notevole giacchè mentre l'acido, pochissimo dissociato, in soluzione diluita mostra una rotazione molecolare di $+ 22\,5°$, i tartrati acidi dei metalli alcalini nelle stesse condizioni hanno una rotazione di circa $+ 42°$ ed i tartrati neutri di circa $+ 63°$.

Partendo da sali puri io ho preparato soluzioni equimolecolari diluite di tartrati acidi di amine grasse ed aromatiche, ed ho constatato che il loro potere rotatorio molecolare è pressochè identico per tutti e precisamente è uguale a quello già osservato per i sali acidi dei metalli alcalini, pei quali non è ammissibile una dissociazione idrolitica. E così pure partendo da tartrati neutri anidri di amine grasse ed aromatiche ho preparato soluzioni equimolecolari di questi sali: ma i valori trovati in tal caso non sono più identici fra loro, giacchè, mentre i dérivati delle amine alifatiche ruotano il piano della luce polarizzata come i tartrati neutri alcalini, i derivati delle amine aromatiche provocano una rotazione quasi sempre minore. Ciò è dovuto alla idrolisi di questi sali.

Si dimostra che la costante di equilibrio della dissociazione idrolitica può essere calcolata mediante le costanti di dissociazione elettrolitica delle sostanze reagenti; cioè nel nostro caso sarebbe la costante di idrolisi

$$K = \frac{C_{H_2O}}{C_{acido}\ C_{base}}$$

dove con C è indicata la costante di dissociazione elettrolitica. Questa costante ha per le amine grasse un valore medio di 1×10^{-2}, mentre per le amine aromatiche ha un valore medio di 1×10^{-10}; vale a dire la costante di dissociazione idrolitica nei sali delle amine aromatiche dovrebbe essere in media 100.000.000 di volte più grande di quella dei sali corrispondenti delle amine grasse. Che poi questa minor rotazione sia veramente dovuta ad idrolisi del sale neutro si può dimostrare applicando a queste soluzioni la legge dell'equilibrio omogeneo. Infatti, ammettendo tale dissociazione, deve esistere fra le concentrazioni dei componenti il nostre sistema la relazione

$$\frac{[\text{sale acido}] \cdot [\text{base}]}{[\text{sale neutro}]} = \text{Costante};$$

dovrebbe quindi ad un aumento di concentrazione della base corrispondere un aumento di concentrazione del sale neutro e quindi un aumento di potere rotatorio. Ciò è appunto verificato (v. Tabella n. 1) per il sale neutro di anilina ed è pure dimostrato per i sali di *o*- *m*- e *p*- toluidina dai dati di Minguin e Wohlgemuth, da essi erroneamente interpretati.

Nella Tabella n. 1 sono raccolti i valori da me trovati per i sali delle amine e per l'acido tartarico libero in soluzioni contenenti un centesimo di grammo-molecola del composto in 100 cc. di soluzione alla temperatura di 15°, fatta eccezione per il tartrato acido di pseudocumidina la cui solubilità ha un valore inferiore. Le osservazioni furono fatte con un polarimetro Laurent, grande modello, impiegando un tubo lungo 5 decimetri.

TABELLA N. 1.

Composto	C	$[\alpha]_D^{15}$	[M]
Tartrato acido di anilina	2,43	+ 17,42°	+ 42,35°
» » *o*-toluidina	2 57	16,34	42,0
» » *m*-toluidina	2,57	16,47	42,35
» » *p*-toluidina	2,57	16,60	42,7
» » *p*-amidofenolo . . .	2,59	16,2	42,0
» » *p*-anisidina	2,73	15,4	42,0
» » *p* fenetidina	2,87	14,75	42,4
» » chinolina	2,79	14,95	41,7
» » piridina	2,29	18,5	42,35
» » pseudocumidina . .	1,14	14,92	42,5
» » benzilamina	2,57	16,6	42,7
» » dietilamina	2.23	18,98	42,35
» » metilamina	1,81	23,4	42.35
» » ammonio	1,67	25,55	42,7
» neutro di anilina	3,36	17,1	57,5
» » »	3,36 + 0,93 di anilina	17,6	59,0
» » »	3,36 + 1,86 »	17,24	57,9
» » *o*-toluidina	3.64	15,6	56,7
» » *m*-toluidina	3,64	15,8	57,6
» » *p*-toluidina	3,64	15,85	57,7
» » chinolina	4,08	13,5	55,9
» » piridina	3,08	19 2	59,2
» » benzilamina	3.64	17,4	63,4
» » dietilamina	2,96	21,1	62,6
» » metilamina	2,12	29,7	63,1
» » ammonio	1,84	34,6	63,7
Acido tartarico	1,50	15,0	22,5

Tabella n. 2.

Composto	C	$[\alpha]_D^{20}$	[M]
Tartrato acido di ammonio (Landolt)	1,712	+ 25,65°	+ 42,8°
» » litio »	7,998	27,43	42,8
» » sodio »	4,409	23,95	41,2
» » potassio »	0,615	22,61	42,5
» » tallio (Long)	1.000	12,02	42,5
» neutro di ammonio (Landolt)	9,433	34,26	63,0
» » litio »	8,305	35,84	58,1
» » sodio »	9,946	30,85	59,9
» » potassio »	11,597	28,48	64,4
» » $NaNH_4$ »	9,690	32,65	61,7
» » KNH_4 »	10,515	31,11	63,8
» » NaK (Long)	5,000	29,73	62,5

Nella Tabella n. 2 sono invece raccolti i valori dei poteri rotatorî trovati da Landolt e da Long per i tartrati acidi e neutri dei metalli alcalini nelle condizioni indicate di temperatura e di concentrazione.

Si noti (Tabella n. 1) come, aumentando la concentrazione dell'anilina nella soluzione del tartrato neutro di questa base, il potere rotatorio dapprima cresce per poi diminuire senza tuttavia raggiungere il valore trovato per i sali neutri delle amine grasse. Questo è dovuto al fatto che l'aumento di concentrazione della base, mentre fa decrescere la dissociazione idrolitica, fa pure decrescere la dissociazione elettrolitica cosicchè, quando la prima è divenuta trascurabile, in soluzione esiste un sale neutro meno dissociato dei corrispondenti sali di amine alifatiche in soluzioni equimolecolari. In conseguenza della legge di Oudeman-Landolt verificata da Th. Thomsen per i tartrati [1] il sale neutro di anilina deve avere in tali condizioni un potere rotatorio molecolare alquanto minore e l'abbassamento deve accentuarsi per l'ulteriore aggiunta di base.

Dalla Tabella n. 1 si vede che, come aveva osservato il Kannonikow, i tartrati neutri di anilina, toluidina, chinolina hanno un potere rotatorio specifico vicino a quello dell'acido tartarico. Ad esempio, per il tartrato neutro di *o*-toluidina si è trovato $[\alpha]_D^{15} = + 15,6°$, mentre per l'acido libero si era trovato $[\alpha]_D^{15} = + 15,0°$. Ma se invece di riferire le rotazioni ottiche alle quantità in peso delle sostanze noi le riferiamo al numero delle molecole attive, considerando i poteri rotatorî molecolari, noi troviamo rispettivamente i valori $[M]_D^{15} = + 56,7°$ ed $[M]_D^{15} = + 22,5°$. Cioè in soluzione acquosa la molecola di tartrato neutro di *o*-toluidina fa ruotare il piano della luce polarizzata più del doppio della molecola di acido tartarico. È dunque completamento infondata l'affermazione fatta da A. Kannonikow circa

[1] J. pr. Ch. [2] *35*, 145.

la completa dissociazione idrolitica dei tartrati neutri delle basi deboli basandosi sulla uguaglianza dei loro poteri rotatorî specifici col potere rotatorio specifico dell'acido tartarico. Egli non tenendo conto di lavori già pubblicati da Landolt (1873) e da Oudeman (1876-1885) aveva attribuito ai poteri rotatorî specifici dei tartrati acidi e dei tartrati neutri quella costanza di valore che gli autori ora ricordati, avevano invece già riconosciuto ai poteri rotatorî molecolari dei sali attivi. Ed era naturale che egli trovasse deviazioni dalla sua legge, specialmente nei sali delle basi aromatiche di alto peso molecolare.

L'applicazione della legge di Andeman-Landolt avrebbe pure evitato a Minguin e Wohlgemuth l'erronea deduzione circa la dissociazione idrolitica dei tartrati acidi delle basi deboli. Infatti, questi autori avrebbero constatato dai dati polarimetrici da loro stessi trovati che i poteri rotatorî molecolari delle soluzioni dei tartrati acidi di anilina, di *m*- e *p*- toluidina erano identici ai poteri rotatorî molecolari dei sali corrispondenti di propilamina, di butilamina, di dietilamina, di trietilamina, per i quali essi escludevano ogni dissociazione idrolitica. Ed avrebbero pure constatato che i poteri rotatorî molecolari osservati per i tartrati delle amine aromatiche in presenza di un eccesso di base si avvicinavano al valore trovato per i sali neutri delle amine grasse.

Del resto i sali neutri delle amine aromatiche, contrariamente all'affermazione di Minguin e Wohlgemuth, si possono facilmente preparare dalle loro soluzioni acquose contenenti un eccesso di base. Questi tartrati già prima ottenuti e studiati, furono di recente descritti da Th. Percy Hilditch (1). Sono sostanze ben cristallizzate, incolore, aventi generalmente, a differenza dei sali acidi, acqua di cristallizzazione.

I valori dei poteri rotatorî molecolari trovati per i sali soprascritti, permettono di concludere:

1° I tartrati acidi delle basi organiche in soluzione acquosa diluita, a temperatura ordinaria, posseggono un potere rotatorio molecolare identico a quello trovato per i tartrati acidi dei metalli alcalini; essi quindi non sono idrolizzati.

2° I tartrati neutri delle amine grasse, nelle stesse condizioni di temperatura e concentrazione, hanno un potere rotatorio molecolare uguale a quello trovato per i corrispondenti sali alcalini; essi pure non subiscono adunque dissociazione idrolitica.

3° I tartrati neutri delle amine aromatiche in condizioni identiche mostrano un potere rotatorio molecolare notevolmente inferiore a quello osservato per i sali corrispondenti delle amine grasse che cresce coll'aumentare della concentrazione della base nella soluzione; essi sono quindi parzialmente idrolizzati.

(1) C. 1911, I, 114.

Fisica. — *Una nuova determinazione della costante della legge di Stefan-Boltzmann* (1). Nota della dott.ssa Marya Kahanowicz, presentata dal Corrisp. M. Cantone.

Intrapresi questa ricerca, perchè il metodo prometteva qualche vantaggio rispetto a quelli fin'ora adoperati nelle varie determinazioni della costante suddetta. Il fatto che non si sia ancora riuscito a verificare sperimentalmente la legge stessa di Stefan-Boltzmann, poichè in ogni serie di esperienze eseguite dai diversi sperimentatori si è sempre riscontrata una dipendenza sistematica dei valori di σ dalla temperatura, dalla distanza e dalle dimensioni delle aree raggianti, come anche la circostanza non insignificante che i valori medii di σ sono stati dedotti dai varii sperimentatori da valori abbastanza discordanti, crea dei dubbi intorno al buon funzionamento tanto dei ricevitori integrali adoperati, quanto dei radiatori messi in prova.

Come apparecchi più perfetti si presentano il bolometro di Kurlbaum (2), e la pila Paschen, modificata da Gerlach (3), perchè in essi i due processi — il radiometrico e l'elettrico — avvengono in condizioni identiche, risultando la medesima lamina ricevitrice sede dell'assorbimento dell'energia raggiante e della produzione dell'energia elettrica, il che assicura la condizione che per la compensazione vi sia una spesa di energia uguale a quella da compensare, condizione non raggiunta rigorosamente in nessun altro ricevitore integrale. L'apparecchio di Gerlach presenta però l'inconveniente che non si realizza con esso un regime stabile per il funzionamento del sistema termometrico, essendo difficile ammettere che la posizione della pila affacciata colle saldature alla lamina ricevitrice e tenuta da essa a distanza mantenga inalterata la sua posizione rispetto alla lamina, onde risultano condizioni non stazionarie per la trasmissione del calore. D'altronde la piccola prontezza dell'apparecchio, il quale richiede un tempo di esposizione di 2 minuti, mentre col bolometro di Kurlbaum si raggiunge l'equilibrio dopo 20 o 30 secondi, fa temere che nasca un'azione efficace anche da parte degli schermi esterni. Perciò questo metodo non è il più adatto per l'uso di un ricevitore del tipo termoelettrico. Condizioni certamente migliori si realizzano col ricevitore integrale di Amerio (4), nel quale la saldatura della coppia termoelettrica è applicata direttamente sulla lamina ricevitrice, raggiungen-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) Wied. Ann. *46*, 1892, pag. 204; Wied. Ann. *65*, 1898, pag. 746.

(3) Ann. d. Phys. *38*, 1912, pag. 1.

(4) Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. X, fascicolo 9, pag. 337. V. anche Corso di Fisica sperimentale del prof. M. Cantone, vol. III, pag. 429.

dosi così lo scopo che la trasmissione di calore avvenga sempre nelle identiche condizioni e rapidamente.

Il forno elettrico costituisce certamente il migliore artifizio per realizzare il principio della cavità con pareti a temperatura uniforme, ma soltanto nel caso in cui il fascio è limitato ai raggi emergenti dalla parte centrale del tubo, ove la temperatura si mantiene sensibilmente uniforme. Le dimensioni delle finestre nel caso delle esperienze di Lummer e Kurlbaum, di Valentiner e di altri per la loro grandezza non garentivano affatto che si ricevesse energia solo dalla regione centrale, giacchè i diaframmi interni, se limitano il fascio, costituiscono in parte sorgenti di energia a temperatura non uniforme. Nè a togliere il dubbio spontaneo vale l'asserzione dei signori Lummer e Kurlbaum fondata sull'osservazione visuale (1), perchè i giudizii su questa base sono assai grossolani.

Un'altra causa di errore sta nel modo come i diversi sperimentatori computavano la temperatura. Essi seguivano le vicissitudini del forno in tutto il regime crescente, assegnando volta per volta il valore della costante alla temperatura osservata, senza arrivare ad un regime costante (2). Come ho potuto accertare nelle mie esperienze, nelle quali sono riuscita a raggiungere caso per caso le condizioni di regime, la temperatura dedotta in condizioni variabili risulta maggiore di quella ottenuta a regime costante, e ciò si spiega col fatto che, data la piccola conducibilità della sostanza refrattaria del tubo, il processo verso la temperatura uniforme si compie troppo rapidamente per essere risentito dall'elemento termoelettrico, sicchè lo stato termico di quest'ultimo è in ritardo rispetto a quello delle pareti.

In quanto poi al radiatore di Puccianti (3), è da notare che l'energia da esso irradiata non può considerarsi come dovuta ad un corpo nero, 1° perchè le pareti della cavità difficilmente potevano assumere temperatura uniforme, per quanto si cercasse di mantenere il pallone nell'aria liquida fino al collo; 2° perchè lo schermo che limitava l'area emittente non era mantenuto alla temperatura del ricevitore, nel quale caso, come risulta da alcune mie esperienze (ved. pag. 7), dove si faceva fluire lentamente il liquido nella scatola in cui era praticata la finestra, funzionano da sorgente anche le pareti che limitano l'apertura, aggiungendo dell'energia a quella emessa dal radiatore.

Nel ricevitore integrale fatto costruire dal prof. Cantone è applicato il sistema di Amerio: una lamina di manganina di cm. 0,013, di spessore sufficientemente uniforme, ricoperta dai due lati di nerofumo, porta saldata

(1) Ann. d. Phys., *5*, 1901, pag. 829.

(2) V. p. es. il procedimento sperimentale di Valentiner (Ann. de Phys., *31*, 1910, pag. 304 e seguenti).

(3) Nuovo Cimento (6), 4, 1912, pag. 36.

nel centro una coppia termoelettrica ferro-nichel. Il sistema è racchiuso in un involucro sferico di ottone, con argentatura elettrolitica all'interno, di cm. 12 di diametro esterno e di cm. 10 di diametro interno. La finestra rettangolare praticata nell'involucro in corrispondenza alla lamina, risulta tanto in larghezza (cm. 0,335), che in lunghezza (cm. 1,410) un poco più piccola della lamina, onde il fascio, che proviene da altra finestra presso a poco della stessa area a distanza di cm. 35, o di cm. 56, colpisce integralmente la lamina interna annerita. Con questo ci avviciniamo, più che nelle ricerche degli altri sperimentatori, ad una radiazione normale, e si realizza inoltre la condizione di un'apertura assai piccola rispetto alla superficie interna dell'involucro, condizione che si verifica in modo ben grossolano in molti ricevitori usati con una certa pretesa di grande rigore. D'altra parte si può essere sicuri che le grosse pareti dell'involucro conservano una temperatura uniforme e quasi costante, poichè la quantità di calore che viene da esse assorbita nel breve tempo di azione dell'involucro è talmente piccola da non produrre una sensibile variazione di temperatura.

Assumendo per il potere assorbente del nerofumo 0.96 e per il potere riflettente dell'argento 0,95, si deduce per il potere assorbente [1] del nostro ricevitore 0.998, donde segue che anche in condizioni molto sfavorevoli l'energia viene assorbita da questo ricevitore quasi totalmente, avendosi una perdita di solo 0,2 %. In condizioni più favorevoli, cioè nell'ipotesi che il potere assorbente del nerofumo sia 0,98, si avrebbe la perdita di solo 0.1 %. Si vede pertanto che il ricevitore da me usato, pur non essendo di grande sensibilità rispetto alle temperature relativamente basse della sorgente, presenta qualche vantaggio sugli altri messi in opera nelle varie ricerche per la determinazione di σ, in quanto che un fascio sensibilmente cilindrico penetra nel ricevitore, dove è assorbito quasi per intero, e determina nella saldatura attaccata alla laminetta un effetto termico nello stesso modo che col passaggio della corrente fornita dall'accumulatore nel tempo brevissimo (30 secondi) necessario a raggiungere il regime stazionario.

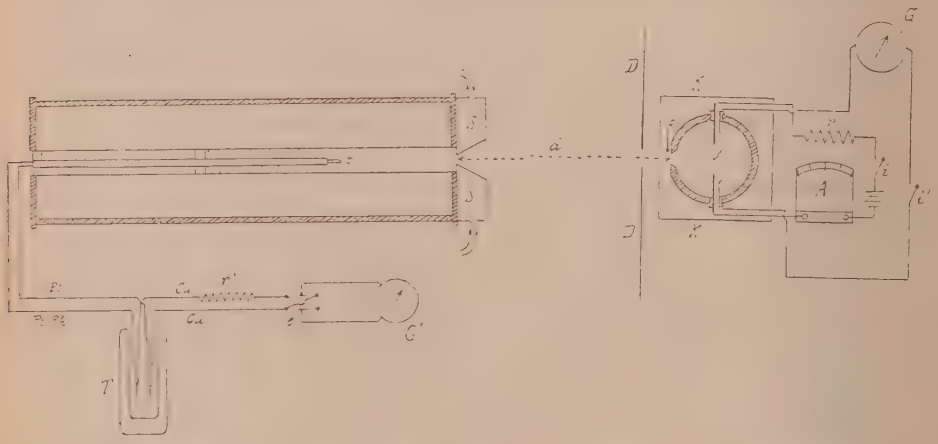
Il ricevitore era chiuso in una scatola di latta R seguita da uno schermo riflettente D abbastanza grande; e lo sportellino s, manovrabile per trasmissione a distanza, serviva per intercettare la radiazione negli intervalli di riposo.

Come si cennò, per il radiatore si fece uso di una piccola area raggiante; e si cercò di ottenere nel miglior modo possibile l'uniformità di temperatura nella regione da cui direttamente emanava il fascio penetrante nel ricevitore. Si ricorse a tale scopo ad un forno elettrico modello Heraeus, di 60 cm. di lunghezza, alla cui estremità anteriore fu applicato uno schermo S a scatola con circolazione di acqua, ed avente un'apertura rettangolare interna

[1] V. Amerio, loc. cit., pag. 337.

larga cm. 0,370 ed alta cm. 1,432. Affinchè il tubo potesse funzionare da corpo nero, fu operata dalla parte posteriore la chiusura con un disco di amianto sciolto, impastato nel biossido di manganese; la saldatura σ di un elemento Le Chatelier occupava la parte centrale del tubo.

La laminetta del ricevitore era chiusa in circuito con un accumulatore, con una cassetta di resistenze r, con un milliamperometro di precisione di Hartmann e Braun A, e con un interruttore a mercurio i. La coppia termoelettrica formava circuito con un galvanometro tipo Deprez-d'Arsonval G avente la sensibilità di 6×10^{-10} Amp. a due metri di distanza, e con un interruttore a mercurio i'. La perfetta simmetria di questo galvanometro indusse a ritenere trascurabile l'azione disturbatrice per effetto Peltier, quindi



si rese superflua l'inversione della corrente. Nel circuito dell'elemento Le Chatelier i fili di rame che partivano dalle saldature fredde, riparate in un pallone Dewar T, riempito di ghiaccio, si univano al galvanometro G' del tipo Deprez-d'Arsonval di sensibilità di 8×10^{-9} Amp. a due metri di distanza, mediante una cassetta di resistenze r' ed un commutatore a mercurio c.

La taratura dei galvanometri fu eseguita con due elementi Weston e con resistenze misurate col ponte di Wheatstone. Alla stessa unità di resistenza del ponte furono riportate le resistenze della cassetta r' e del galvanometro G'. Fu controllata anche la graduazione del milliamperometro A, adoperando in questa taratura la stessa unità di f. e. m. dell'elemento Weston e la stessa unità di resistenza del ponte. Le dimensioni delle aree raggianti vennero determinate con la macchina a dividere.

Si eseguì la taratura del ricevitore parecchie volte durante il lavoro e si accertò sempre la medesima sensibilità dell'apparecchio. Per la resistenza della laminetta, misurata col ponte di Wheatstone la cui unità fu confron-

tata coll'Ohm Internazionale, si ebbe costantemente il valore di ohm internazionali 0,0802.

Per dedurre la costante σ, si applicava la formola

$$(1) \qquad \frac{\sigma (T^4 - T_0^4) \Delta s \Delta s'}{\pi d^2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2}{d^2}\right) = i^2 r ,$$

dove si denota con T la temperatura del radiatore, con T_0 quella del ricevitore; con a, b e a', b' le dimensioni delle aree raggianti Δs e $\Delta s'$, poste alla distanza d; con i l'intensità di corrente data dal milliamperometro e con r la resistenza della laminetta.

Per la graduazione dell'elemento Le Chatelier si ricorse ad un bagno ad acqua fino a 100° e ad un bagno ad olio di lino fino a 300°, procedendo per piccoli intervalli termici, poichè in questa regione la linea figurativa della f. e. m. in funzione della temperatura presenta una curvatura molto pronunziata. Precisato così l'andamento della curva nella regione di notevole curvatura, bastava un punto piuttosto distante per ottenere i dati necessarii alla interpolazione e ad una leggiera estrapolazione. Fu scelto a tale scopo il punto di ebollizione dello zolfo (444°, 55).

Volendo rappresentare la f. e. m. dell'elemento con una funzione di 2° grado della temperatura, si ottiene l'espressione:

$$(2) \qquad E = - 114{,}33 + 7{,}262\, t + 0{,}0020\, t^2 ,$$

dove E indica la f. e. m. espressa in mikrovolta e t la temperatura della saldatura Pt, Pt-Rh riferita alla scala normale, supponendo gli altri punti di unione a 0°. Come si rileva dall'annessa tabella, il punto di ebollizione dello zolfo e le temperature vicine alla iniziale si accordano male col ramo ascendente della curva; inoltre si ha l'inconveniente che presentano tutte le funzioni di 2° grado di Holborn e Day [1], dedotte per gli elementi termoelettrici accoppiati col platino, risultando una f. e. m. negativa per la temperatura 0° della saldatura calda. Ciò importa per l'elemento normale da me adoperato un errore di quasi 16° per la temperatura iniziale. Bisogna quindi concludere che per questo elemento, o meglio per questa categoria di elementi, la legge sperimentale di Avenarius si verifica piuttosto male.

La f. e. m. del detto elemento si rappresenta invece molto bene con la seguente funzione di 3° grado della temperatura:

$$(3) \qquad E = - 20 + 5{,}573\, t + 0{,}00894\, t^2 - 0{,}0000076\, t^3$$

colla quale non solo si riesce ad allacciare bene tutti i punti di riferimento nella graduazione, ma si rendono molto più piccoli gli errori residui e si fa

[1] Ann. d. Phys. *2*, 1900, pag. 520.

acquistare ad essi il vero carattere di errori accidentali. Per la temperatura iniziale risulta all'ra un errore di soli 3,5°, che porta effetto quasi trascurabile nella valutazione delle temperature utilizzate, che furono tutte superiori ai 250°.

$t_{oss.}$	E	Funzione di secondo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	Funzione di terzo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	$t_{oss.}$	E	Funzione di secondo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$	Funzione di terzo grado $t_{oss.} - t_{calc.}$
0,0	0,0	— 15,7	— 3,5	175,9	1209,4	+ 2,0	— 1,7
25,8	132,3	— 7,9	— 0,5	200,5	1407,7	+ 1,8	— 1,4
50,6	279,7	— 2,9	+ 0,6	228,1	1629,5	+ 2,1	— 0,4
77,3	457,8	0,0	+ 0,4	254,7	1846,0	+ 2,3	+ 1,0
100,0	622,5	+ 1,2	— 0,5	280,8	2067,7	+ 1,8	+ 1,7
125,7	813,4	+ 2,2	— 0,9	306,3	2296,2	+ 0,2	+ 1,3
150,8	1006,7	+ 2,5	— 1,2	444,4	3560,5	— 5,7	— 0,3

Le temperature del forno furono dedotte colla formola (3), riferendosi all'indicazione del galvanometro quando essa diveniva stazionaria o quasi. Si faceva funzionare il forno per 8 o 9 e talvolta per 10 ore, e si seguiva il regime crescente per le ultime 3 o 4 ore. L'esperienza si faceva ad intervalli di un'ora, leggendo consecutivamente il galvanometro annesso al forno e quello del ricevitore e ripetendo l'esperienza due volte. La costante poi si deduceva dalle medie dei valori dedotti nel periodo stazionario dei galvanometri.

I valori così ottenuti, raccolti nella tabella, non mostrano nessun andamento sistematico nè in dipendenza dalla temperatura, nè in dipendenza dalla distanza. Perciò si è indotti a ritenere: 1° che la (3) permette l'estrapolazione della temperatura per lo meno fino a 540°; 2° che l'energia assorbita dal ricevitore non è influenzata in modo sensibile dalla radiazione diffusa dagli schermi. E per quanto riguarda l'assorbimento atmosferico, ritenuto da alcuni come causa di errore non lieve, devo notare che, sebbene avessi operato a temperature basse per le quali l'assorbimento dovrebbe essere notevole, l'accordo fra i risultati ottenuti alle distanze di 35 e di 56 cm. porterebbe ad escludere una sensibile influenza di questa causa di errore.

$d = 35^{cm}$

DATA	t	σ	DATA	t	σ
18 ottobre 1916	326,9	$5,7 \times 10^{-12}$	24 novembre 1916	373,3	$5,8 \times 10^{-12}$
19 » »	323,9	5,6	28 » »	511,2	5,5
24 » »	317,3	5,7	29 » »	537,2	5,5
25 » »	381,2	5,6	30 » »	323,9	5,6
26 » »	381,2	5,6	1 dicembre 1916	376,1	5,7
27 » »	378,1	5,7	2 » »	433,0	5,7
30 » »	457,7	5,5	4 » »	523,9	5,5
10 novembre 1916	447,8	5,4	6 » »	532,5	5,4
13 » »	469,4	5,5	7 » »	520,8	5,5
20 » »	464,7	5,5	8 » »	256,1	5,7
22 » »	437,6	5,7	9 » »	260,8	5,6
23 » »	502,7	5,5	11 » »	287,1	5,7

$d = 56,2^{cm}$

13 dicembre 1916	529,6	$5,7 \times 10^{-12}$	15 dicembre 1916	434,4	$5,5 \times 10^{-12}$
14 » »	512,5	5,7	16 » »	452,5	5,7

Media : $\sigma = 5,60$

La media di tutti i valori è 5,60, e resterebbe inalterata se anche si volessero scartare i valori estremi 5,4 e 5,8. Colla correzione del 0,2 %, essa diverrebbe 5,62, ma ciò, come si è visto, corrisponderebbe a condizioni molto sfavorevoli; il valore più probabile che risulta dalle mie esperienze è quindi 5,61.

Il vantaggio delle piccole aree raggianti risulta anche dal fatto, che il termine di correzione per la non perfetta normalità di tutti gli elementi di superficie diventa trascurabile. Nelle mie esperienze esso importa quattro unità nella terza cifra decimale per la prima distanza, ed un'unità per la seconda; il mio valore risulta perciò indipendente da questa causa di errore.

DATA	t	σ
21 ottobre 1916	326,3	$5,8 \times 10^{-12}$
23 » »	349,1	5,8
28 » »	361,3	5,8
16 novembre 1916	488,7	5,7

Dall'esperienze con efflusso lento, riassunte nel precedente specchietto, si deduce che, se la temperatura non è uniforme in tutto l'ambiente esterno, si ha azione efficace anche da parte delle pareti che limitano l'area emittente.

Riferendomi ai valori ottenuti coi metodi che si presentano come più rigorosi, credo che il mio offra maggiore garanzia di attendibilità, sia perchè, come risulta dal presente specchietto

Sperimentatore	Metodo	Temperatura	Distanza fra le aree raggianti	$\sigma \times 10^{12}$	
				Valori diretti	Valori corretti per la riflessione
Kurlbaum	Bolometro	100°	19cm; 48cm	5,32	5,45
Valentiner	»	100°; 829°-1433°	26cm - 124cm	5,38	5,58
Gerlach	Ricevitore di Paschen	100°	30cm - 43cm	5,803	5,9
Coblentz	Ricevitore di Paschen modificato	1056°-1084°	37cm - 52cm	5,68	5,72
Kahanowicz	Ricevitore di Amerio modificato	256°-537°	35cm; 56cm	5,60	5,61

è ottenuto con un ricevitore che funziona da corpo nero, mentre il bolometro di Kurlbaum ed i ricevitori di Paschen e di Coblentz hanno un potere riflettente non trascurabile, sia perchè, come si è visto, esso risulta indipendente dalla temperatura e dalla distanza.

Al prof. Cantone, che mi ha indirizzato in questa ricerca, rivolgo vivissimi ringraziamenti.

M. E.